$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial(u_r c)}{\partial r}+\frac{\partial(u_z c)}{\partial z}=\frac{1}{Re\cdot Pr_D}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right)-\frac{u_r c}{r}. \quad (6)$$

Численное решение проводилось с использованием неявной обобщённой схемы переменных направлений в Δ−форме. Достоверность расчётов подтверждена сопоставлением различных способов решения, а также сравнением с известными аналитическими решениями. Получены распределения полей скорости, температуры, концентрации в вихревой камере, рассчитанные при различных значениях параметра закрутки – критерия Россби *Rw*. Результаты свидетельствуют о существенном влиянии закрутки на гидродинамику потока; показано выравнивание полей распределения температуры и концентрации при закручивании потока, что имеет большую практическую значимость для получения равномерных покрытий на подложке (рис. 1).

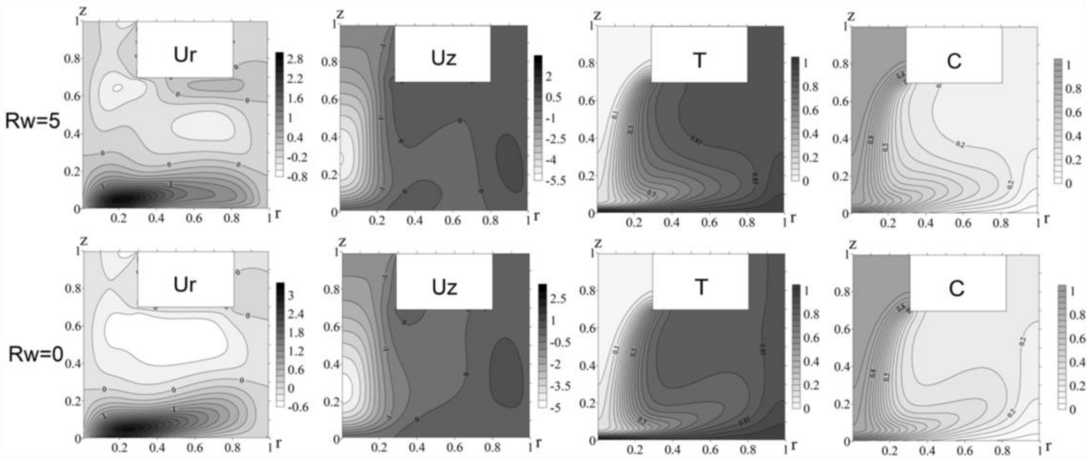

рис. 1. Влияние закрутки течения на его характеристики: радиальная составляющая скорости, аксиальная составляющая скорости, температура, концентрация

Решение начально-краевых задач для уравнения теплопроводности методом интегральных уравнений

Глухов Андрей Юрьевич
Афанасьев Анатолий Михайлович
Волгоградский государственный университет
Сипливый Борис Николаевич, д.т.н.
aglukhov@live.ru

При численном исследовании процессов удаления влаги из влагосодержащих материалов электромагнитным излучением возникает необходимость решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при различных краевых условиях первого, второго и третьего рода в области произвольной формы. Для некоторых тел канонической геометрии удается получить аналитическое решение [1]. Для областей произвольной формы предлагается численный алгоритм, основанный на использовании функции Грина оператора Лапласа.

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\begin{cases}\Delta T-\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T}{\partial t}=f,\\ T(M,0)=\psi(M),\ M\in V,\\ \alpha T(M,t)+\beta\dfrac{\partial T}{\partial n}(M,t)\Big|_{M\in S}=\varphi(M,t).\end{cases} \quad (1)$$

Здесь V – область решения, S – поверхность, ограничивающая V, удовлетворяющая условиям Ляпунова, n – внешняя к S нормаль.

Если известна функция Грина G(M,N) оператора Лапласа для одного из перечисленных краевых условий, то искомое решение представимо в виде [2] (для граничных условий первого рода α=1, β=0):

$$T(M,t)-\frac{1}{4\pi a}\int_V \frac{\partial T}{\partial n}(N,t)G(M,N)dV_N=\frac{1}{4\pi}\int_V f(N,t)G(M,N)dV_N-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S T(N,t)\frac{\partial G}{\partial n_N}(M,N)dS_N. \qquad (2)$$

Это соотношение есть интегро-дифференциальное уравнение относительно *T(M,t)*. Интегральный оператор, порождающий это уравнение является самосопряженным в классе квадратично-интегрируемых функций, поэтому для решения (2) применима теорема Гильберта-Шмидта [3].

Разлагая функции *T(M,t), f(M,t)* в ряды по собственным функциям интегрального оператора и подставляя их в уравнение (2), получаем задачу Коши для коэффициента $c_k(t)$ разложения *T(M,t)*:

$$\frac{dc_k(t)}{dt}+4\lambda_k \pi a c_k(t)=a_k(t),$$
$$c_k(0)=\int_V \psi(N)f_k(N)dV_N.$$

Здесь f_k, λ_k - собственные функции и числа интегрального оператора, удовлетворяющие уравнению:

$$f(M)=\lambda\int_V f(N)G(M,N)dV_N, \quad a_k(t)=a_k^{(1)}(t)+a_k^{(2)}(t),$$
$$a_k^{(1)}(t)=\frac{1}{4\lambda_k\pi}\oint_S \varphi(N,t)\frac{\partial f_k(N)}{\partial n_N}dS_N, \; a_k^{(2)}(t)=\frac{1}{4\lambda_k\pi}\int_V f(N,t)f_k(N)dV_N.$$

Решение $c_k(t)$ представимо в виде:

$$c_k(t)=4\lambda_k\pi a\int_0^t a_k(\tau)e^{-4\lambda_k a\pi(t-\tau)}d\tau+c_k(0)e^{-4\lambda_k a\pi t}$$

Подставляя найденные $c_k(t)$ в разложение для *T(M,t)*, получим окончательный вид решения:

$$T(M,t)=4\pi a\sum_{k=1}^{\infty} f_k(M)\left[\lambda_k\int_0^t a_k(\tau)e^{-4\lambda_k\pi a(t-\tau)}d\tau+c_k(0)e^{-4\lambda_k\pi a t}\right] \qquad (3)$$

Из (3) следует, что решение (1) выражается через собственные функции и число ядра G(M,N) которые могут быть вычислены методом Келлога [3].

Ядро G(M,N), необходимое для реализации этого метода может быть построено приближенно в виде:

$$G(M,N)=\frac{1}{r_{MN}}+\left(\frac{c_1}{r_{M_1N}}+\frac{c_2}{r_{M_2N}}+\ldots+\frac{c_n}{r_{M_nN}}\right),$$

где ci – мощности источников, расположенных в точках Mi вне области V.

Помещая последовательно точки N в граничные точки Qi, i = 1,2 … n и приравнивая результаты нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений для ci:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{c_i}{r_{M_kQi}}=-\frac{1}{r_{MQi}}, \; i=1,2..n.$$

Данный способ построения G(M,N) можно трактовать, как обобщение метода электростатических изображений [4] на области произвольной формы.

Проведя выкладки, аналогичные приведенным выше, можно вывести формулы вида (3) для граничных условий второго и третьего рода. Таким образом, предложенный метод позволяет естественным образом учесть краевые условия различных типов.

Список публикаций:

[1] Афанасьев, А.М. // Теоретические основы химических технологий. – 2014. – т. 48. – С. 222.

[2] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – 7-е изд. –М.: Наука, 2004. – 798 с.

[3] Васильева, А.Б. Интегральные уравнения [Текст] / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – М: Изд-во МГУ, 1989. – 157 с.

[4] Боголюбов, А.Н. Функция Грина оператора Лапласа [Текст] / А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухтарова, Н.Е. Шапкина. – М.: Физический факультет МГУ, 2012. – 130 с.